Теоритично домашно по ДИС 1. Компютърни науки, 1 курс, 2 поток

Камен Димитров Младенов, Група 6

16 Януари 2022

Задача 1. **Решение:** Нека $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

(а) Дефиниция: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in (M; +\infty) \cap D : |f(x) - L| < \varepsilon$
Отрицание: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall M \in \mathbb{R} \; \exists x \in (M; +\infty) \cap D : |f(x) - L| \geq \varepsilon$

(б) Дефиниция: $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D, x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty : f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$
Отрицание: $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D, x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty : \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \geq n_0 : |f(x_n) - L| \geq \varepsilon$

(в) Дефиниция: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} \; \forall x', x'' \in D \cap (M; +\infty) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
Отрицание: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall M \in \mathbb{R} \; \exists x', x'' \in D \cap (M; +\infty) : |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$

Задача 2. **Решение:**

Нека $x_{max} \in M : f(x_{max}) = \sup\{f(x) : x \in M\}$ и $x_{min} \in M : f(x_{min}) = \inf\{f(x) : x \in M\}$
То тогава $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in M$ и $-f(x_{max}) \leq -f(x) \leq -f(x_{min}) \quad \forall x \in M$
$\implies f(x_{min}) - f(x_{max}) \leq f(x) - f(y) \leq f(x_{max}) - f(x_{min}) \quad \forall x, y \in M$
$\implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x_{max}) - f(x_{min})| \leq f(x_{max}) - f(x_{min}) \quad \forall x, y \in M$
$\implies f(x_{max}) - f(x_{min}) \leq |f(x_{min}) - f(x_{max})| \leq |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \in M$
$\implies f(x_{max}) - f(x_{min}) \leq |f(x) - f(y)| \leq f(x_{max}) - f(x_{min})$
$\implies \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in M\} \leq \sup\{f(x) : x \in M\} - \inf\{f(x) : x \in M\}$
$\implies w(f, M) = \sup\{f(x) : x \in M\} - \inf\{f(x) : x \in M\}$

Задача 3. **Решение:**

(а) Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ да бъдат редици, такива че $a_n = f(k), k \geq a$ и $b_n = \inf\{f(x) : x > n\}$
Ще докажем, че $\{b_n\}$ има граница. Всеки елемент на $\{b_n\}$ е инфимум $\Rightarrow \forall n_1 \geq n_0 : b_{n_1} \geq b_{n_0}$
f ограничена $\implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ органичена. Следователно $\{b_n\}$ е ограничена растяща редица.

(б) Допускаме противното, тоест съществува l, когато $\exists \varepsilon > 0 \; \forall N > a \; \exists x \in (N; +\infty) : f(x) \leq l - \varepsilon$
Обаче, щом съществува l, то $\forall N > a \; \forall x \in (N; +\infty) : f(x) \geq \inf\{f(x) : x \in (N; +\infty)\}$
Тоест $\forall N > a \; \forall x \in (N; +\infty) : f(x) \geq l$ Противоречие!

Отново допускаме противното, че съществува l, като не съществува редица $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$,
за която $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$. Построяваме редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b_n = x$ такова че $f(x) = \inf\{f(y) : y > n\}$.
То тогава, ще можем да построим редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n = f(b_n)$. Тази редица ще клони към l,
понеже $\lim\limits_{N \to +\infty} (\inf\{f(x) : x > N\})$ стигаме до противоречие!